V-15 (1 h 1 min) 5-Abril-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Función de Green con Condiciones de Contorno**

La Función de Green, correspondiente a una ecuación diferencial $[\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{g(x)}$, vimos en (II) de resumen del V-14 que debe cumplir: $[\boldsymbol{A}]\boldsymbol{G(x,x')} = \boldsymbol{\delta(x-x')}$

En el V-14 hallamos la F.de Green ***G(x, x´)*** sin imponerle ninguna condición de contorno, utilizando la T.de Fourier. Si consideramos la F. Green con condiciones de contorno [p. ej G(-L/2, x´) = 0 y G(+L/2, x´) = 0] no se puede utilizar la TF con integrales extendidas a ± ∞. Podemos ahora utilizar dos métodos:

1º MÉTODO: resolver de forma tradicional la ecuación $[\boldsymbol{A}]\boldsymbol{G(x,x')} = \boldsymbol{\delta(x-x')}$

Lo aplicaremos para el mismo **EJEMPLO**, visto en V-14, de ecuación diferencial: $\left[\frac{d^2}{dx^2}-1\right]f(x) = g(x)$

Condiciones de contorno: *G(-L/2, x´) = 0* y *G(+L/2, x´) = 0*

La F.Green no depende de cómo sea *g(x)*, que si será relevante para hallar $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,x')\, g(x')\, dx'$

En nuestro ejemplo la (II) de resumen del V-14 es: $\left[\frac{d^2}{dx^2}-1\right]G(x,x') = \delta(x-x')$

Para cualquier valor de x ≠ x´(según la Delta Dirac) la ecuación es: $\frac{d^2G(x,x')}{dx^2} - G(x,x') = 0$

Esta ecuación homogénea se resuelve de forma tradicional: $\lambda^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \pm 1 \;\Longrightarrow\; G(x,x') = C_1e^x + C_2e^{-x}$

La Delta de Dirac divide el eje X en dos zonas, cuando x < x´ y cuando x > x. Las constantes C_1 y C_2 serán diferentes para ambas zonas y las tendremos que calcular con las condiciones de contorno siguientes:

Para x < x´: $G(x,x') = ae^x + be^{-x}$ <u>1ª condición</u>: $G(-L/2,x') = 0 \;\Longrightarrow\; \boldsymbol{ae^{-L/2} + be^{+L/2} = 0}$

Para x > x´: $G(x,x') = ce^x + de^{-x}$ <u>2ª condición</u>: $G(+L/2,x') = 0 \;\Longrightarrow\; \boldsymbol{ce^{+L/2} + de^{-L/2} = 0}$

<u>3ª condición</u>: Continuidad de *G(x, x´)* implica que, en x = x´, debe ser igual el valor de la función que viene de la izquierda y el valor de la función que viene de la derecha: $\boldsymbol{ae^{x'} + be^{-x'} = ce^{x'} + de^{-x'}}$

<u>4ª condición</u>: Para x = x´: Utilizamos que la integral de la Delta de Dirac (área encerrada) debe ser la unidad:

$$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\delta(x-x')dx = 1 \;\Longrightarrow\; \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\left[\frac{d^2G(x,x')}{dx^2} - G(x,x')\right]dx = 1 \text{ considerando que } \varepsilon \rightarrow 0$$

G(x, x´) es continua, pero sus derivadas no lo son. Por eso, cuando ε → 0 y los límites de integración son el mismo, la integral de *G(x, x´)* es nula, pero no la integral de su derivada segunda *G''(x, x´)*. Por lo tanto, la condición queda:

$$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\frac{d^2G(x,x')}{dx^2}dx = \left[\frac{dG(x,x')}{dx}\right]_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} = 1$$ Hacemos las derivadas de *G(x, x´)* para ambas zonas.

Cuando x < x´: $\frac{dG(x,x')}{dx} = ae^x - be^{-x}$ sustituyendo por límite inferior: $ae^{x'-\varepsilon} - be^{-(x'-\varepsilon)}$

Cuando x > x´: $\frac{dG(x,x')}{dx} = ce^x - de^{-x}$ sustituyendo por límite superior: $ce^{x'+\varepsilon} - de^{-(x'+\varepsilon)}$

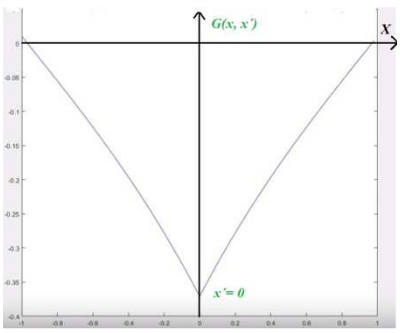
Por lo tanto, resulta: $ce^{x'+\varepsilon} - de^{-(x'+\varepsilon)} - ae^{x'-\varepsilon} + be^{-(x'-\varepsilon)} = 1$

Haciendo que ε → 0, la 4ª condición que deben cumplir las constantes queda: $\boldsymbol{ce^{x'} - de^{-x'} - ae^{x'} + be^{-x'} = 1}$

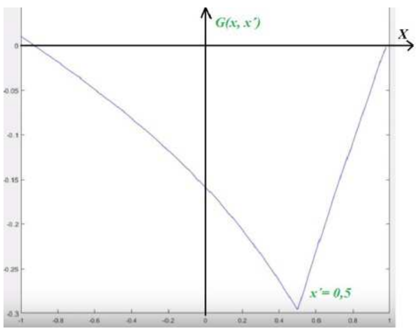
Si se resuelve (laboriosamente) el sistema de las cuatro ecuaciones anteriores con cuatro incógnitas, hallamos las constantes ***a, b, c*** y ***d*** y podemos expresar:

Para x < x´: $$\boldsymbol{G(x,x') = \frac{1}{2(1-e^{2L})}\left[\left(e^{2L-x'} - e^{L+x'}\right)e^{x} + \left(e^{x'} - e^{L-x'}\right)e^{-x}\right]}$$

Para x > x´: $$\boldsymbol{G(x,x') = \frac{1}{2(1-e^{2L})}\left[\left(e^{-x'} - e^{L+x'}\right)e^{x} + \left(e^{2L+x'} - e^{L-x'}\right)e^{-x}\right]}$$



Gráfica de G
Cuando ***x´= 0***
(con MatLab)



Gráfica de G
Cuando ***x´= 0,5***
(con MatLab)

2º MÉTODO: Con funciones propias del operador diferencial *[D]*

La ecuación diferencial, que se va a resolver, tiene la siguiente estructura: $\boldsymbol{[D]f(x) + cf(x) = g(x)}$ "c" es una cte.

EJEMPLO visto antes: $\frac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{f(x) - f(x) = g(x)}$ En este caso el operador diferencial es: $[D] = \frac{d^2}{dx^2}$ y $c = -1$

Afirmamos, que para el caso más general de la ecuación diferencial (luego aplicaremos el ejemplo) la función de Green se obtiene con el sumatorio siguiente:

Siendo $\boldsymbol{u_n(x)}$ las funciones propias del operador *[D]*, que cumplen las condiciones de contorno. $\boldsymbol{\lambda_n}$ el conjunto de valores propios asociados

$$\boldsymbol{G(x,x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)\cdot u_n(x')}{\lambda_n + c}} \qquad \textbf{(I)}$$

Para justificar la anterior fórmula asimilamos la ecuación diferencial a una ecuación vectorial-matricial en R^N con base canónica $\{\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)}, \dots \vec{e}^{(N)}\}$: $\boldsymbol{(D)\vec{f} + c\vec{f} = \vec{g}}$

Consideramos ***(D)*** una matriz de orden N, diagonalizable $\rightarrow \exists\, \lambda_n \; y \; \vec{u}^{(n)} / \; \boldsymbol{(D)\,\vec{u}^{(n)} = \lambda_n \vec{u}^{(n)}}$

Los vectores propios $\boldsymbol{\vec{u}^{(n)}}$ son ortonormales y pueden considerarse una base de R^N.

Los vectores $\boldsymbol{\vec{f}}$ y $\boldsymbol{\vec{g}}$ pueden expresarse con componentes de base canónica $\boldsymbol{\vec{e}^{(n)}}$ o de base de vectores propios $\boldsymbol{\vec{u}^{(n)}}$

$$\vec{f} = f_1\vec{e}^{(1)} + f_2\vec{e}^{(2)} + \cdots = \sum_{j=1}^{N} f_j \vec{e}^{(j)} \quad = \quad a_1\vec{u}^{(1)} + a_2\vec{u}^{(2)} + \cdots = \sum_{j=1}^{N} a_j \vec{u}^{(j)}$$

$$\vec{g} = g_1\vec{e}^{(1)} + g_2\vec{e}^{(2)} + \cdots = \sum_{j=1}^{N} g_j \vec{e}^{(j)} \quad = \quad b_1\vec{u}^{(1)} + b_2\vec{u}^{(2)} + \cdots = \sum_{j=1}^{N} b_j \vec{u}^{(j)}$$

A su vez, cada vector propio se puede expresar con sus componentes canónicas: $\vec{u}^{(n)} = u_1^{(n)}\vec{e}^{(1)} + u_2^{(n)}\vec{e}^{(2)} + \cdots$

Estando $\vec{f}$ y $\vec{g}$ expresados con componentes de base de vectores propios aplicamos la ecuación: $(D)\vec{f} + c\vec{f} = \vec{g}$

$$(D)\left(a_1\vec{u}^{(1)} + a_2\vec{u}^{(2)} + \cdots a_N\vec{u}^{(N)}\right) + c\left(a_1\vec{u}^{(1)} + a_2\vec{u}^{(2)} + \cdots a_N\vec{u}^{(N)}\right) = b_1\vec{u}^{(1)} + b_2\vec{u}^{(2)} + \cdots b_N\vec{u}^{(N)}$$

Teniendo en cuenta la linealidad del producto, que $(D)\vec{u}^{(n)} = \lambda_n\vec{u}^{(n)}$ y agrupando por componentes, queda:

$$(a_1\lambda_1 + ca_1)\vec{u}^{(1)} + (a_2\lambda_2 + ca_2)\vec{u}^{(2)} + \cdots (a_N\lambda_N + ca_N)\vec{u}^{(N)} = b_1\vec{u}^{(1)} + b_2\vec{u}^{(2)} + \cdots b_N\vec{u}^{(N)}$$

Igualando: $(a_n\lambda_n + ca_n) = b_n$ Las componentes a_n del vector $\boldsymbol{\vec{f}}$ (incógnitas de la ecuación) son: $a_n = \frac{b_n}{\lambda_n + c}$

Deseamos encontrar las componentes del vector $\vec{f}$, pero en la base canónica. Sabemos que cualquier componente es el producto escalar de todo el vector por el vector de la base: $f_j = \vec{f}\cdot\boldsymbol{\vec{e}^{(j)}}$ y también que $\vec{u}^{(n)}\cdot\boldsymbol{\vec{e}^{(j)}} = u_j^{(n)}$

$$f_j = \vec{f}\cdot\boldsymbol{\vec{e}^{(j)}} = \left(\frac{b_1}{\lambda_1 + c}\vec{u}^{(1)} + \frac{b_2}{\lambda_2 + c}\vec{u}^{(2)} + \cdots \frac{b_N}{\lambda_N + c}\vec{u}^{(N)}\right)\cdot\boldsymbol{\vec{e}^{(j)}} = \frac{b_1}{\lambda_1 + c}u_j^{(1)} + \frac{b_2}{\lambda_2 + c}u_j^{(2)} + \cdots \frac{b_N}{\lambda_N + c}\,u_j^{(N)}$$

$$f_j = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{\lambda_n + c} u_j^{(n)}$$

Las componentes b_n del vector $\vec{g}$ pueden expresarse:

$$b_n = \vec{g}\cdot\vec{u}^{(n)} = \left(g_1\vec{e}^{(1)} + g_2\vec{e}^{(2)} + \cdots g_N\vec{e}^{(N)}\right)\cdot\vec{u}^{(n)} = g_1u_1^{(n)} + g_2u_2^{(n)} + \cdots g_Nu_N^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} g_k u_k^{(n)}$$

Introduciéndolo en la expresión de f_j:

$$f_j = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sum_{k=1}^{N} g_k u_k^{(n)}}{\lambda_n + c} u_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{n=1}^{N} \frac{u_j^{(n)}\cdot u_k^{(n)}}{\lambda_n + c}\right] g_k$$

Si hacemos que N $\rightarrow \infty$ y consideramos :

- valores continuos del índice *j* , que llamamos "x" $\rightarrow$ $\quad f_j \rightarrow f(x)\,; \quad u_j^{(n)} \rightarrow u^{(n)}(x)$
- valores continuos del índice *k*, que llamamos "x´" $\rightarrow$ $\quad g_k \rightarrow g(x')\,; \quad u_k^{(n)} \rightarrow u^{(n)}(x')$

El sumatorio sobre *K* es integral sobre x´:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{(n)}(x)\cdot u^{(n)}(x')}{\lambda_n + c}\right] g(x')dx'$$

Comparando con (I) de resumen de V-14 justificamos la validez de la expresión **(I)**

El sumatorio sobre el índice "n" abarca las infinitas funciones propias que pueda tener el operador *[D]*

Aplicación del cálculo de función de Green con expresión (I) al mismo EJEMPLO de ecuación diferencial que hemos utilizado para hallar la función de Green por el primer método.

$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - f(x) = g(x)$ con las mismas condiciones de contorno: ***G(-L/2, x´) = 0*** y ***G(+L/2, x´) = 0***

En este caso el operador diferencial es: $[D] = \frac{d^2}{dx^2}$ $y \quad c = -1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{G(x,x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) \cdot u_n(x')}{\lambda_n - 1}}$

Las funciones propias $u_n(x)$ del operador $\frac{d^2}{dx^2}$ cumplen: $\frac{d^2}{dx^2} u_n(x) = \boldsymbol{\lambda_n} \cdot u_n(x)$

Las funciones que, tras derivarlas dos veces, se obtiene la misma multiplicada por una constante, pueden ser:

$$u(x) = sen\, ax \quad \rightarrow \quad u''(x) = -a^2 \cdot sen\, ax$$

$$u(x) = \cos bx \quad \rightarrow \quad u''(x) = -b^2 \cdot \cos bx$$

$$u(x) = e^{cx} \quad \rightarrow \quad u''(x) = c^2 \cdot e^{cx}$$

Además, cumplir las condiciones de contorno, impuestas para la función de Green:

$$\left.\begin{array}{l} u\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow sen\left(-a\frac{L}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow -a\frac{L}{2} = n\pi \\ u\left(+\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow sen\left(+a\frac{L}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow +a\frac{L}{2} = n\pi \end{array}\right\} \quad a = n \cdot \frac{2\pi}{L} \;;\; n \in [-\infty, +\infty] \Rightarrow \boldsymbol{u_n(x) = sen\frac{2\pi n}{L}\, x}$$

$$\left.\begin{array}{l} u\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \cos\left(-a\frac{L}{2}\right) = 0 \\ u\left(+\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \cos\left(+a\frac{L}{2}\right) = 0 \end{array}\right\} \quad a\frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} + \boldsymbol{n}\pi \rightarrow a = \frac{\pi + 2\pi \boldsymbol{n}}{L} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u_n(x) = \cos\frac{\pi + 2\pi n}{L}\, x}$$

$$\left.\begin{array}{l} u\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow e^{-c\frac{L}{2}} = 0 \\ u\left(+\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow e^{+c\frac{L}{2}} = 0 \end{array}\right\} \quad c\frac{L}{2} = \pm\infty \quad \text{No se pueden cumplir condiciones de contorno}$$

Además vamos a normalizar las funciones propias. Deben cumplir: $\boldsymbol{\int_{-L/2}^{+L/2} u_n(x) \cdot u_n(x)\, dx = 1}$ para lo que habrá que introducir unas constantes multiplicativas: $\boldsymbol{u_n(x) = A \cdot sen\frac{2\pi n}{L}\, x}$ y $\boldsymbol{u_n(x) = B \cdot \cos\frac{\pi + 2\pi n}{L}\, x}$

$$\int_{-L/2}^{+L/2} A\, sen\frac{2\pi n}{L}\, x \cdot A\, sen\frac{2\pi n}{L}\, dx = 1 \quad \rightarrow \quad A^2 \int_{-L/2}^{+L/2} sen^2 \frac{2\pi n}{L} x \cdot dx = \frac{A^2}{2} \int_{-L/2}^{+L/2} \left(1 - \cos\frac{4\pi \boldsymbol{n}}{L} x\right) dx = 1$$

$$\frac{A^2}{2}\left[x - \frac{sen\frac{4\pi \boldsymbol{n}}{L}x}{\frac{4\pi \boldsymbol{n}}{L}}\right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{A^2}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{sen\frac{4\pi \boldsymbol{n} L}{L\ 2}}{\frac{4\pi n}{L}} + \frac{L}{2} + \frac{sen\frac{4\pi \boldsymbol{n}}{L}\left(-\frac{L}{2}\right)}{\frac{4\pi n}{L}}\right) = \frac{A^2}{2} L = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{u_n(x) = \sqrt{\frac{L}{2}}\, sen\frac{2\pi n}{L}\, x}}$$

Los valores propios asociados a esta serie de funciones propias son: $\boxed{\lambda_{\boldsymbol{n}} = -\left(\frac{2\pi \boldsymbol{n}}{L}\right)^2}$

De forma similar, las funciones propias con cosenos, se normalizan poniendo: $\boxed{\boldsymbol{u_n(x) = \sqrt{\frac{L}{2}} \cos\frac{\pi + 2\pi n}{L} x}}$

Los valores propios asociados a esta otra serie de funciones propias son: $\boxed{\lambda_{\boldsymbol{n}} = -\left(\frac{\pi + 2\pi \boldsymbol{n}}{L}\right)^2}$

Calculadas funciones propias y valores propios (hay dos series de $u_n(x)$ y en el video a la segunda le llama $v_n(x)$) y la función de Green se puede obtener con el sumatorio (descompuesto en uno para cada serie):

$$\boldsymbol{G(x,x')} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{L}{2}}\, sen\frac{2\pi}{L}\, \boldsymbol{n}x \cdot \sqrt{\frac{L}{2}}\, sen\frac{2\pi}{L}\, \boldsymbol{n}x'}{-\left(\frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}\right)^2 - \boldsymbol{1}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{L}{2}} \cos\frac{\pi + 2\pi \boldsymbol{n}}{L} x \cdot \sqrt{\frac{L}{2}} \cos\frac{\pi + 2\pi \boldsymbol{n}}{L}\, x'}{-\left(\frac{\pi + 2\pi \boldsymbol{n}}{L}\right)^2 - \boldsymbol{1}}$$

Para la obtención exacta de ***G(x, x´)*** los sumatorios son de infinitos sumandos. No obstante, se puede programar con MatLab, tomando $L = 2$, un número grande de sumandos (basta con 100, así se hace en el video), para comprobar que la gráfica de ***G(x, x´)*** es igual a la obtenida con el primer método.